
Analisi frequenziale dei sistemi lineari (ver. 1.2)

1.1 Risposta impulsiva di un sistema lineare (richiami)

Definizione 1.1 *La risposta impulsiva di un sistema è la risposta che il sistema presenta allorché è applicato al suo ingresso un impulso unitario con condizioni iniziali nulle.*

È noto che la conoscenza della risposta impulsiva permette di prevedere la risposta a qualunque ingresso. Supponiamo di conoscere l'andamento dell'ingresso dal tempo $t = 0$ al tempo $t = t_f$, e la risposta impulsiva $g(\tau)$.

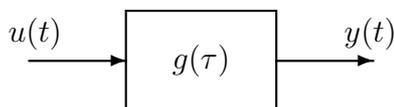


Figura 1.1: Schema a blocchi di un sistema lineare, dove $g(\tau)$ denota la risposta impulsiva del sistema.

È noto che la risposta del sistema ad un generico istante di tempo $t = \bar{t}$ risulta data dalla convoluzione tra il segnale di ingresso e la risposta impulsiva, cioè:

$$y(\bar{t}) = \int_0^{\bar{t}} g(\tau)u(\bar{t} - \tau)d\tau.$$

Questo risultato è una diretta conseguenza del principio di sovrapposizione degli effetti e per la sua dimostrazione si rinvia al corso di *Fondamenti di Automatica*.

1.2 Metodi di rappresentazione di una funzione di trasferimento

Sia $G(s)$ la funzione di trasferimento di un sistema lineare e sia $U(s)$ la trasformata di Laplace dell'ingresso. Per la proprietà della trasformata di Laplace, risulta che l'uscita è pari a:

$$Y(s) = G(s)U(s).$$

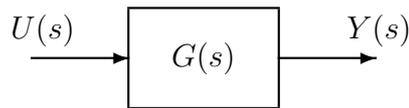


Figura 1.2: Schema a blocchi di un sistema lineare, nel dominio di Laplace.

Una funzione di trasferimento può essere rappresentata in vari modi equivalenti.

Rappresentazione poli-zeri. Possiamo scrivere la $G(s)$ nel seguente modo:

$$G(s) = k \frac{\prod_i (s - z_i) \prod_i (s^2 + 2\xi_i \alpha_{n_i} s + \alpha_{n_i}^2)}{\prod_j (s - p_j) \prod_j (s^2 + 2\zeta_j \omega_{n_j} s + \omega_{n_j}^2)} \quad (1.1)$$

dove p_j e z_i rappresentano poli e zeri reali, mentre $\zeta_j \omega_{n_j} \pm j \omega_{n_j} \sqrt{1 - \zeta_j^2}$ e $\xi_i \alpha_{n_i} \pm j \alpha_{n_i} \sqrt{1 - \xi_i^2}$ denotano poli e zeri complessi coniugati.

Dalla (1.1) risulta evidente che i poli (o gli zeri) complessi coniugati sono le radici del polinomio

$$s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2 = 0.$$

Il termine ζ viene chiamato *coefficiente di smorzamento* ($0 \leq \zeta \leq 1$), mentre ω_n si dice *pulsazione naturale*. Facendo riferimento alla Fig. 1.3, possiamo valutare i valori dei parametri ζ e ω_n di un generico polo (o zero) complesso coniugato.

Sia $p = \sigma + j\omega$, risulta che $\zeta = \cos\vartheta$ e $\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$.

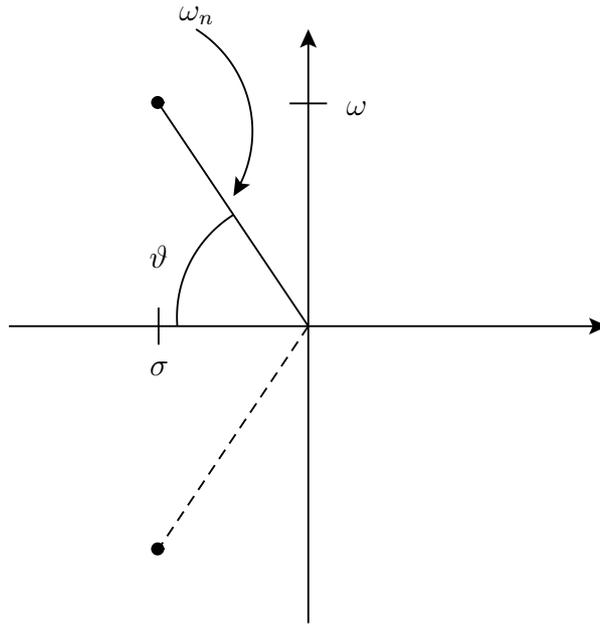


Figura 1.3: Rappresentazione di una coppia di poli (o zeri) complessi coniugati.

Forma di Bode. Una funzione $G(s)$ si dice in forma di Bode se viene messo in evidenza il guadagno di Bode k_B , ossia è della forma:

$$G(s) = \frac{k_B}{s^\nu} \frac{\prod_i \left(1 - \frac{s}{z_i}\right) \prod_i \left(1 + \frac{2\xi_i}{\alpha_{n_i}} s + \frac{s^2}{\alpha_{n_i}^2}\right)}{\prod_j \left(1 - \frac{s}{p_j}\right) \prod_j \left(1 + \frac{2\zeta_j}{\omega_{n_j}} s + \frac{s^2}{\omega_{n_j}^2}\right)}$$

dove ν è il numero degli eventuali poli nell'origine.

1.2.1 Risposta in frequenza di un sistema (richiami)

Sia data una generica funzione di trasferimento $G(s)$. Assumiamo di applicare come ingresso una sinusoidale con ampiezza A e frequenza ω al sistema in quiete (condizioni iniziali nulle):

$$u(t) = A \sin(\omega t) \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad U(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

La risposta forzata Y_f del sistema avrà la seguente forma:

$$Y_f(s) = U(s) G(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} G(s) = Y_f^G(s) + Y_f^U(s)$$

dove Y_f^G rappresenta la parte transitoria (dipendente dai poli di G) e Y_f^U rappresenta il regime permanente (dipendente da U). Se il sistema è stabile asintoticamente, allora:

$$y_f^G(t) \rightarrow 0 \quad \text{per } t \rightarrow \infty.$$

Anche se assumeremo nel seguito di lavorare con sistemi stabili, da un punto di vista matematico è sempre possibile lavorare con sistemi instabili, decomponendo l'uscita in due parti e considerando solo la componente della risposta alla stessa frequenza dell'ingresso. Dal punto di vista sperimentale, se il sistema è instabile non sarà possibile determinare l'andamento a regime.

Valutiamo adesso l'espressione di $Y_f^U(s)$.

$$Y_f^U(s) = \frac{k}{s - j\omega} + \frac{k^*}{s + j\omega}$$

dove:

$$k = \frac{A\omega}{s + j\omega} G(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{A\omega}{2j\omega} G(j\omega) = -j\frac{A}{2} G(j\omega).$$

Analogamente risulta:

$$k^* = j\frac{A}{2} G(-j\omega)$$

Antitrasformando si ottiene:

$$\begin{aligned} y_f^U(t) &= -j\frac{A}{2} G(j\omega)e^{j\omega t} + j\frac{A}{2} G(-j\omega)e^{-j\omega t} \\ &= -j\frac{A}{2} |G(j\omega)| [e^{j(\omega t + \varphi(\omega))} - e^{-j(\omega t + \varphi(\omega))}] \\ &= A |G(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi(\omega)) \end{aligned} \tag{1.2}$$

dove

$$\varphi(\omega) = \angle G(j\omega).$$

Risulta quindi che:

$$|G(j\omega)| = \frac{\text{ampiezza della sinusoide in uscita}}{\text{ampiezza della sinusoide in ingresso}}$$

$$\angle G(j\omega) = \text{sfasamento tra la sinusoide in ingresso e quella in uscita.}$$

La funzione $G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega}$, ovvero gli andamenti delle due funzioni $|G(j\omega)|$ (modulo) e $\angle G(j\omega)$ (fase) rappresentano la risposta in frequenza del sistema.

La risposta in frequenza di un sistema descrive completamente il suo comportamento. Infatti, in virtù del principio di sovrapposizione degli effetti e della decomponibilità dei segnali secondo l'analisi di Fourier, la risposta in frequenza permette di calcolare la risposta per qualunque ingresso $Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega)$.

1.2.2 Diagrammi di Bode (richiami)

Come abbiamo visto in precedenza, data una funzione di trasferimento, è possibile rappresentarla nella forma di Bode. Consideriamo la risposta in frequenza $G(j\omega)$:

$$G(j\omega) = \frac{k_B}{(j\omega)^n} \frac{\prod(1 + j\omega\tau_i)}{\prod(1 + j\omega T_i)} \frac{\prod\left(1 + \frac{2\xi_i}{\alpha_{ni}}j\omega - \frac{\omega^2}{\alpha_{ni}^2}\right)}{\prod\left(1 + \frac{2\xi_i}{\omega_{ni}}j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_{ni}^2}\right)}.$$

Un modo molto diffuso per rappresentare graficamente $G(j\omega)$ consiste nel diagrammare modulo e fase della funzione $G(j\omega)$ al variare della pulsazione ω . Si ottengono così i diagrammi di Bode della funzione di trasferimento $G(s)$. Poiché vorremo diagrammare un ampio spettro di frequenze, utilizzeremo una scala logaritmica per quanto riguarda l'asse delle ascisse. Per lo stesso motivo, poiché il modulo della funzione $G(j\omega)$ può assumere valori molto diversi, è preferibile esprimere il modulo in *decibel*. Questo consente inoltre di semplificare il tracciamento dei diagrammi, trasformando i prodotti in somme.

Dato un valore numerico x , il suo corrispondente in decibel (dB) è:

$$x \implies 20 \log_{10}(x).$$

Se dividiamo la scala logaritmica in 10 parti, spostandosi di 3/10 su tale scala si raddoppia o si dimezza il valore corrispondente, come riportato in Fig. 1.4

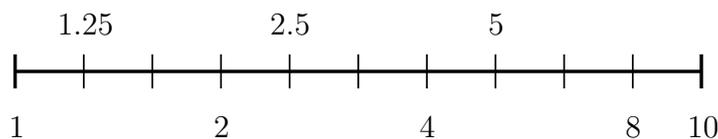


Figura 1.4: Asse delle ascisse in scala logaritmica.

Esempio 1.1

Sia data la funzione

$$G(s) = \frac{(s + 1)}{(s^2 + 0.5s + 1)}.$$

In Fig. 1.5 sono riportati i diagrammi di Bode di modulo e fase relativi.

Esempio 1.2 (Linea di ritardo)

Talvolta, in un sistema dinamico può essere presente un elemento di ritardo (es. un nastro trasportatore, una condotta idraulica, ecc.). Questo elemento è tale da ritardare il segnale

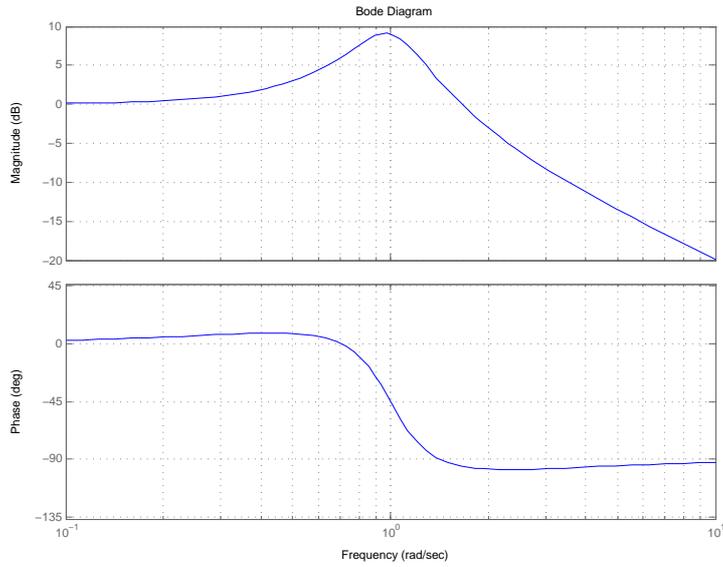


Figura 1.5: Diagramma di Bode di $G(s) = \frac{(s+1)}{(s^2+0.5s+1)}$.

al suo ingresso; una linea di ritardo di T secondi è caratterizzata dalla seguente relazione ingresso-uscita:

$$y(t) = u(t - T).$$

La funzione di trasferimento di tale blocco è pari a $D(s) = e^{-sT}$.

Il valore del modulo sarà pari a $\|e^{-j\omega T}\| = 1 = 0_{dB}$, mentre la fase sarà $\angle e^{-j\omega T} = -\omega T$.

Il diagramma di Bode di un blocco di ritardo con $T = 0.5$ secondi è riportato in Fig. 1.6.

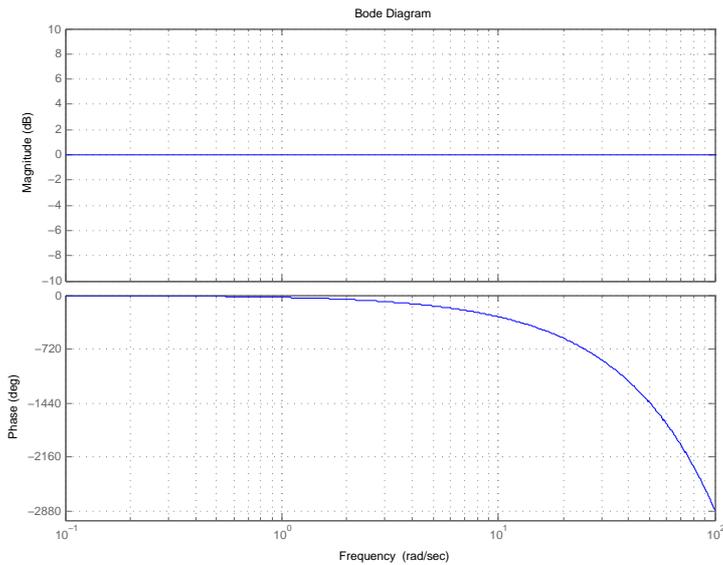


Figura 1.6: Diagramma di Bode di una linea di ritardo ($T = 0.5$).

1.2.3 Diagrammi di Nyquist

Sia data una funzione di variabile complessa $G(j\omega)$. Abbiamo visto in precedenza che un possibile modo per tracciare un diagramma di tale funzione è quello di utilizzare i diagrammi di Bode, ovvero quello di rappresentare il modulo e la fase di $G(j\omega)$ al variare di ω in due grafici distinti.

Un altro possibile metodo consiste nel tracciare la parte reale e quella immaginaria di $G(j\omega)$ al variare di ω da 0 a $+\infty$ sul piano complesso. Tale grafico viene chiamato *diagramma polare*. Se tracciamo tale grafico per tutte le frequenze $\omega \in (-\infty, +\infty)$ otterremo il cosiddetto *diagramma di Nyquist*. Naturalmente, il diagramma ottenuto sarà un diagramma orientato da $\omega = -\infty$ a $\omega = +\infty$. Il diagramma che otterremo sarà sempre chiuso.

E' utile notare che, una volta tracciato il diagramma per $\omega \in [0, +\infty]$, sarà possibile disegnare anche la parte relativa alle pulsazioni negative semplicemente facendone il simmetrico rispetto all'asse reale.

Per semplificare il tracciamento di un diagramma di Nyquist è buona norma aver preventivamente tracciato il diagramma di Bode.

Un esempio di digramma di Nyquist, relativo ad una $G(s) = \frac{100}{(s+1)(s+10)}$ (valutata per $s = j\omega$) è riportata in Fig. 1.7.

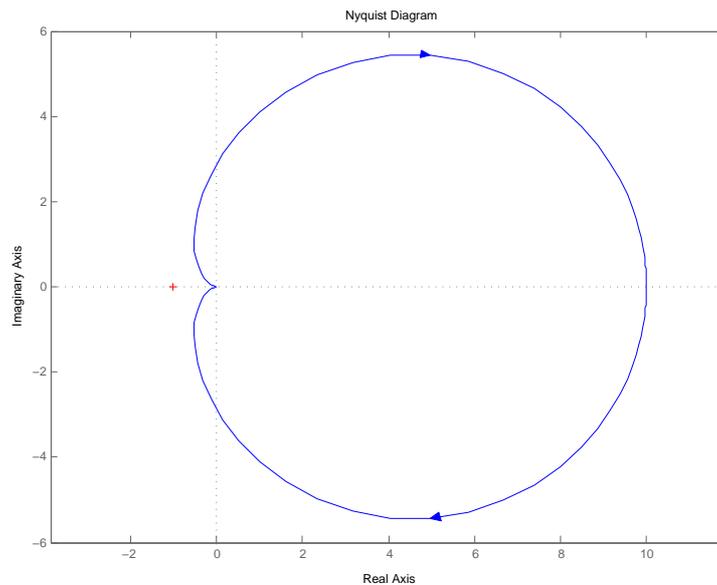


Figura 1.7: Diagramma di Nyquist di $G(s) = \frac{100}{(s+1)(s+10)}$.

Analizziamo adesso i diagrammi di Nyquist di alcuni semplici sistemi.

Integratore

Un integratore è un sistema che presenta un solo polo in 0 e nessuno zero, cioè:

$$G(s) = \frac{1}{s} \quad \longrightarrow \quad G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}.$$

Dovendo tracciare il grafico per $\omega \in (-\infty, +\infty)$, risulta evidente che per $\omega = 0$ si incorrerà in una divisione per 0. Per evitare questo, quando ω è prossima allo 0, possiamo sostituire il diagramma di $G(s)|_{s=j\omega}$ con quello di $G(s)|_{s=\rho e^{j\varphi}}$, essendo $\rho > 0$ e sufficientemente piccolo e $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (Fig. 1.8). Quindi, in prossimità dello 0, avremo

$$s = \rho e^{j\varphi} \quad \text{con} \quad \rho \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

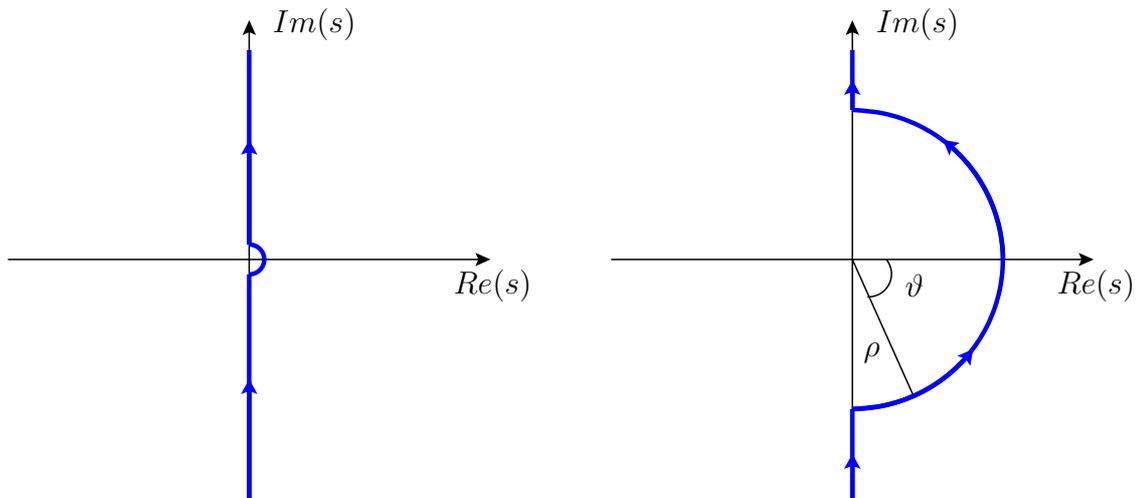


Figura 1.8: Andamento della variabile s in presenza di un polo in 0.

I diagrammi di Bode e di Nyquist di un integratore sono riportati in Fig. 1.9, in cui la semicirconferenza sul diagramma di Nyquist è da intendersi all'infinito (cioè con raggio infinito), rappresentando essa il diagramma di Nyquist per $\rho \rightarrow 0$.

E' utile notare che il fenomeno di una richiusura all'infinito sarà presente tutte le volte che una funzione presenterà un polo in 0. Supponiamo infatti di avere la seguente funzione

$$G(s) = \frac{K_B \prod(1 + s \tau'_i)}{s \prod(1 + s \tau_i)}.$$

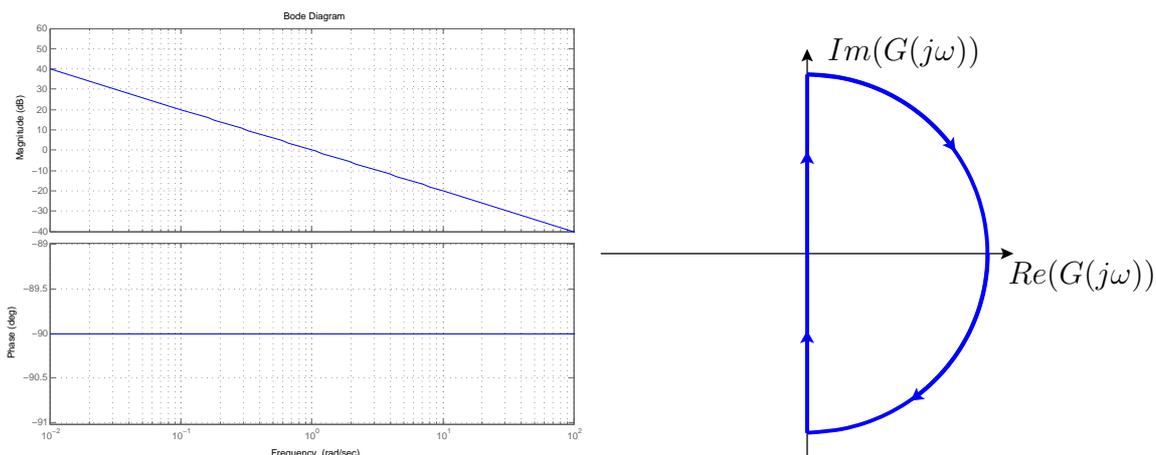


Figura 1.9: Diagramma di Bode e di Nyquist di un integratore.

E' evidente che per $s \rightarrow 0$ il termine $\frac{\prod(1+s\tau'_i)}{\prod(1+s\tau_i)} \rightarrow 0$ per cui:

$$G(s)|_{s \approx 0} = \frac{k_B}{s} \Big|_{s=\rho e^{j\varphi}} = \frac{k_b}{\rho e^{j\varphi}} = \frac{k_B}{\rho} e^{-j\varphi}, \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Inoltre, è utile notare che lo stesso ragionamento si può estendere al caso in cui $G(s)$ presenti poli lungo l'asse immaginario.

Linea di ritardo

Sia data una linea di ritardo $D(s) = e^{-sT}$. Poiché il modulo di tale funzione (calcolato per $s = j\omega$) è costante e pari ad 1, il diagramma di Nyquist dovrà necessariamente essere una circonferenza di raggio unitario. Poiché la fase è monotona decrescente, tale circonferenza dovrà essere percorsa in senso orario (Fig. 1.10).

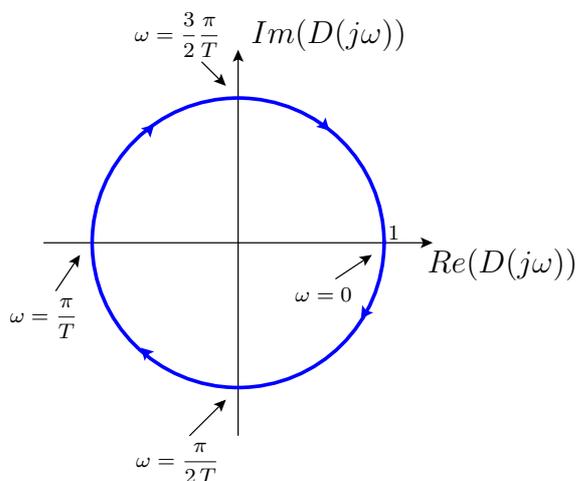


Figura 1.10: Diagramma di Nyquist di una linea di ritardo.

Esempio 1.3

Sia data una generica funzione di trasferimento del primo ordine:

$$G(s) = \frac{1}{1 + s\tau}$$

I diagrammi di Bode e di Nyquist sono riportati in Fig. 1.11. Notare che per $\omega \rightarrow \infty$ si ha $\|G(j\omega)\| \rightarrow -\infty_{dB} = 0$.

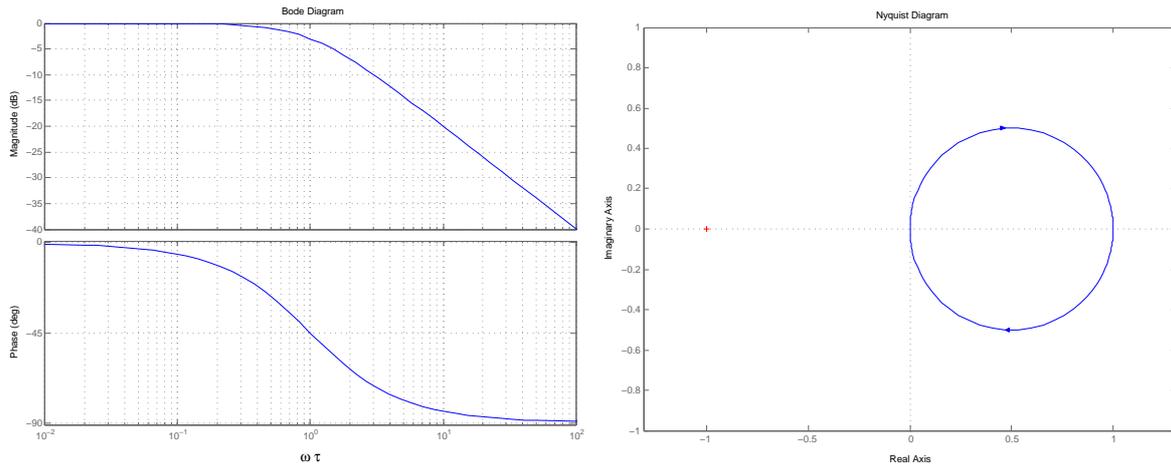


Figura 1.11: Diagramma di Bode e di Nyquist di un sistema del primo ordine.

Esempio 1.4

Sia data la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

i diagrammi di Bode e Nyquist sono riportati in Fig. 1.12.

E' possibile valutare la posizione dell'asintoto verticale calcolando il limite della parte reale di $G(j\omega)$ per $\omega \rightarrow 0$ che in questo caso risulta essere pari a -1 . Infatti,

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re}[G(j\omega)] &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{j\omega(j\omega+1)} \right] = \lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{-\omega^2 + j\omega} \right] = \lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re} \left[-\frac{1}{\omega} \frac{\omega + j}{\omega^2 + 1} \right] \\ &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \left[-\frac{\omega}{\omega(\omega^2 + 1)} \right] = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{\omega^2 + 1} \right] = -1. \end{aligned}$$

Esempio 1.5

Sia data la seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+1)}.$$

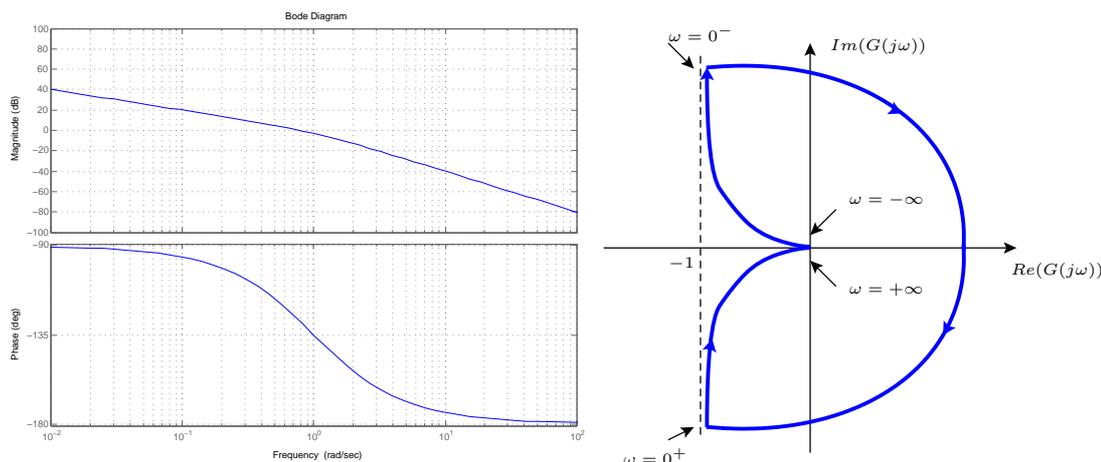


Figura 1.12: Diagramma di Bode e di Nyquist di $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$.

I diagrammi di Bode e Nyquist sono riportati in Fig. 1.13. Vale la pena notare che in questo caso le richiuse all'infinito sono dovute alla presenza di 2 poli complessi coniugati lungo l'asse immaginario ($p = \pm j$). In presenza di tali poli puramente immaginari avremo sempre delle rotazioni in senso orario di 180° . Tale fenomeno è verificabile anche dai diagrammi di Bode.

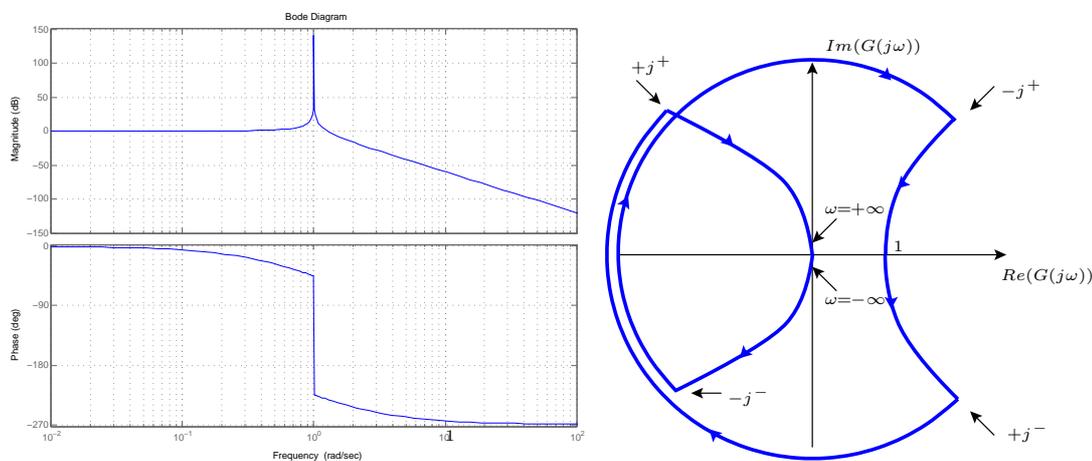


Figura 1.13: Diagramma di Bode e di Nyquist di $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+1)}$.

Per valutare la posizione dell'asintoto è necessario calcolare la tangente alla curva nel punto $[X(\omega), Y(\omega)]$:

$$Y - Y(\omega) = \frac{\frac{dY(\omega)}{d\omega}}{\frac{dX(\omega)}{d\omega}} [X - X(\omega)]$$

$$m = \lim_{\omega \rightarrow \omega^*} \frac{\frac{dY(\omega)}{d\omega}}{\frac{dX(\omega)}{d\omega}}$$

$$n = \lim_{\omega \rightarrow \omega^*} [Y(\omega) - m X(\omega)]$$

dove ω^* è la pulsazione per la quale il modulo vale infinito. Se questi limiti esistono, allora l'asintoto ha la seguente espressione:

$$Y = m X + n.$$

Esempio 1.6

Supponiamo di avere la seguente funzione di trasferimento in cui è presente una linea di ritardo:

$$G(s) = e^{-sT} \frac{1+s}{s(1+10s)(1+0.1s)^2}.$$

Supponiamo per il momento che non sia presente il ritardo ($T = 0$). I diagrammi di Bode e Nyquist sono riportati in Fig. 1.14.

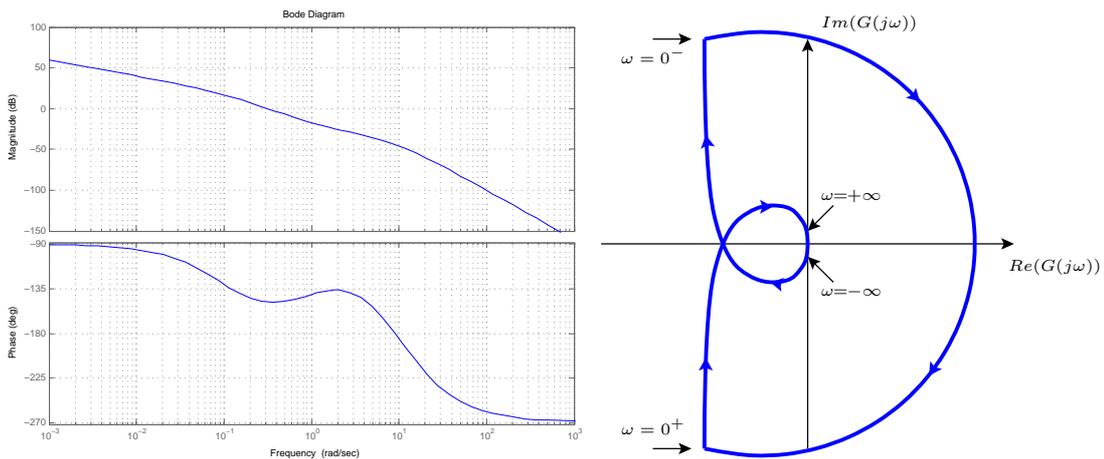


Figura 1.14: Diagramma di Bode e di Nyquist nel caso di $T = 0$.

Analizziamo adesso il caso $T \neq 0$. Come abbiamo visto nell'esempio 1.2, il modulo della $G(j\omega)$ rimane invariato, mentre la fase si riduce di un termine $\angle e^{-j\omega T} = -\omega T$. Questo provocherà nel diagramma di Nyquist una serie infinita di rotazioni orarie intorno all'origine. Il punto di attraversamento dell'asse reale tenderà a spostarsi verso sinistra.

1.2.4 Diagrammi di Nichols

Abbiamo visto che data una generica funzione di trasferimento $G(j\omega)$ è possibile rappresentarla mediante i diagrammi di Bode (modulo e fase) e quelli di Nyquist (parte reale

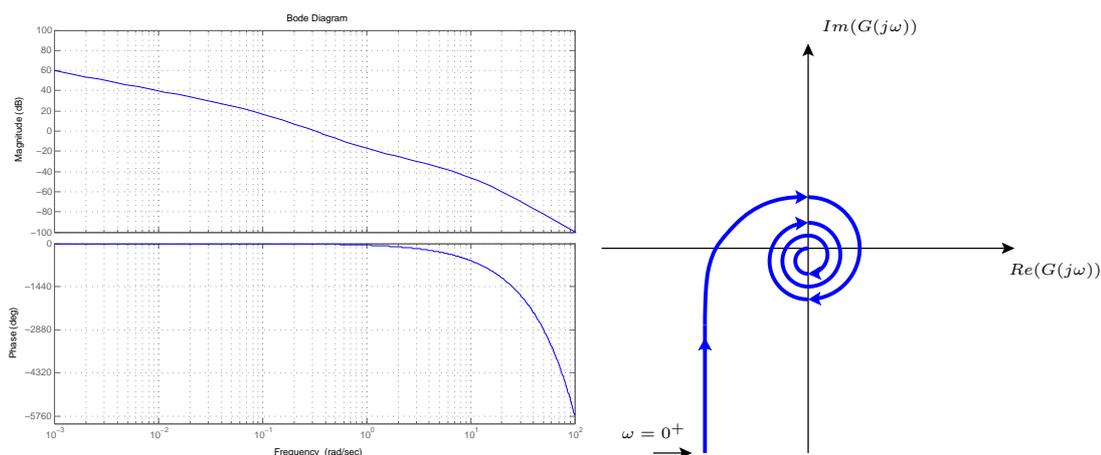


Figura 1.15: Diagramma di Bode e di Nyquist ($\omega \in (0, +\infty)$) nel caso di $T = 1$ secondo.

ed immaginaria). Un ulteriore metodo è quello di utilizzare i diagrammi di Nichols, che consistono nel rappresentare modulo e fase su un unico diagramma al variare della pulsazione. In particolare riporteremo in ascissa la fase ed in ordinata il modulo espresso in decibel.

In Fig. 1.16 e 1.17 sono riportati alcuni esempi di diagrammi di Nichols.

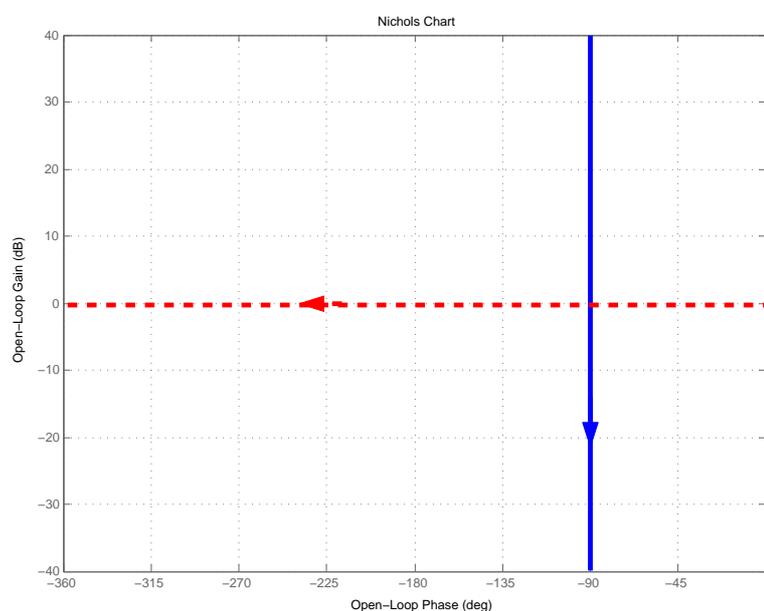


Figura 1.16: Diagramma di Nichols di un integratore (—) e di un elemento di ritardo (— —).

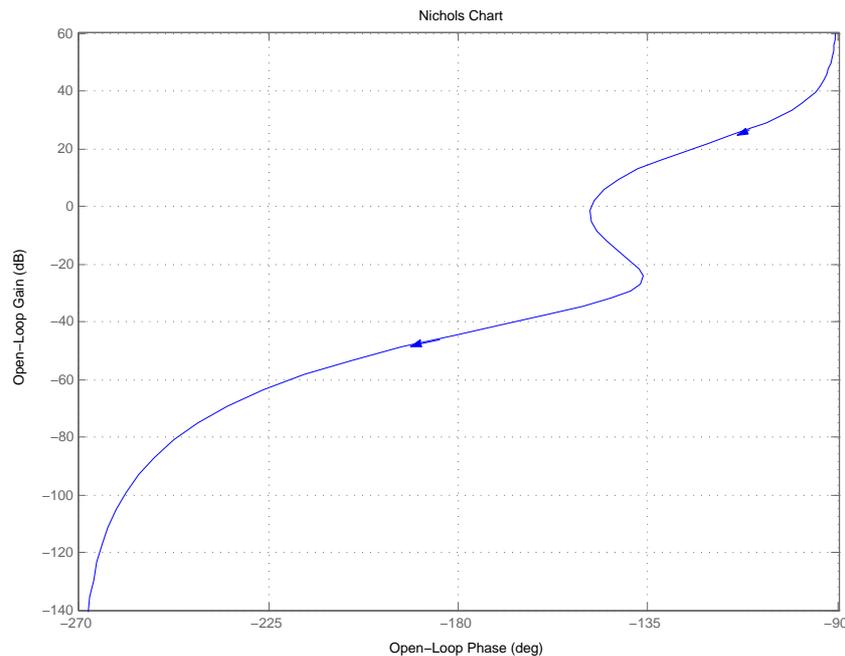


Figura 1.17: Diagramma di Nichols di $G(s) = \frac{1+s}{s(1+10s)(1+0.1s)^2}$.

1.3 Sistemi a minima rotazione di fase

Definizione 1.2 Una funzione di trasferimento $G(s)$ si dice a minima rotazione di fase se non ha zeri e poli nel semipiano destro del piano s .

E' immediato verificare che data una funzione di trasferimento a non minima rotazione di fase, sar  sempre possibile scomporla come la cascata di una funzione a minima rotazione di fase ed un filtro *passa-tutto* (*all-pass*). Ad esempio:

$$G(s) = \frac{1-s}{(1+2s)(1+10s)} = \underbrace{\frac{1+s}{(1+2s)(1+10s)}}_{\text{minima rotazione}} \underbrace{\frac{1-s}{1+s}}_{\text{passa-tutto}}.$$

In Fig. 1.18   riportato il diagramma di Bode di un filtro passa-tutto; notare che il modulo di tale funzione   costante e pari a 0 dB.

1.3.1 Il teorema di Bode

Sia data una $G(s)$ stabile ed a minima rotazione di fase (ovvero tutti gli zeri e i poli hanno parte reale ≤ 0). Definiamo:

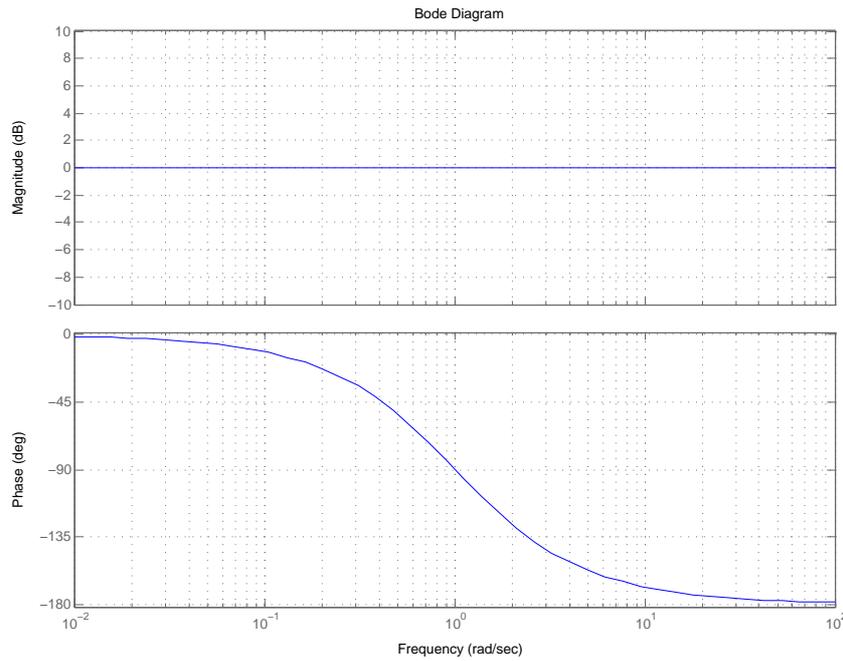


Figura 1.18: Diagramma di Bode di un filtro passa-tutto ($z = 1$).

- $\Omega \triangleq \ln \omega$
- $M(\omega) \triangleq \ln |G(j\omega)|$
- $\varphi(\omega) \triangleq \arg G(j\omega)$

Allora vale la seguente relazione (teorema di Bode):

$$\varphi(\Omega_0) = \frac{\pi}{2} \left. \frac{dM}{d\Omega} \right|_{\Omega=\Omega_0} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left. \frac{dM}{d\Omega} \right|_{\Omega=\Omega_0} - \left. \frac{dM}{d\Omega} \right|_{\Omega=\Omega} \right] \ln \operatorname{cotgh} \left| \frac{\Omega - \Omega_0}{2} \right| d\Omega. \quad (1.3)$$

Il teorema di Bode afferma che, sotto le ipotesi date, il valore della fase di $G(j\omega)$ ad una frequenza generica Ω_0 può essere calcolata a partire dal diagramma di modulo. Essa è ottenuta dalla somma di due termini:

- il primo, multiplo di $\frac{\pi}{2}$ dipende dalla pendenza espressa in decadi/decadi del diagramma di modulo alla frequenza data;
- il secondo dipende dagli scarti di pendenza del diagramma di modulo tra la frequenza Ω_0 e tutte le altre frequenze, pesati dalla funzione $\ln \operatorname{cotgh} \left| \frac{\Omega - \Omega_0}{2} \right|$. Ricordiamo che $\operatorname{cotgh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

La funzione di peso, il cui grafico è riportato in Fig. 1.19, è tale da ridurre drasticamente il contributo delle frequenze molto diverse da Ω_0 . Questo significa che la fase di $G(j\omega)$ alle frequenze lontane dai punti di rottura del diagramma di modulo dipenderà solamente dal primo termine di (1.3).

Dunque, la pendenza del diagramma di modulo ci consentirà di valutare la fase di $G(j\omega)$ ad una data frequenza, purché questa sia abbastanza lontana dalle frequenze di rottura relative a zeri e poli; in caso contrario sarà necessario correggere tale valore considerando anche il II termine di (1.3).

Ricordiamo che il teorema di Bode non vale per sistemi a non minima rotazione.

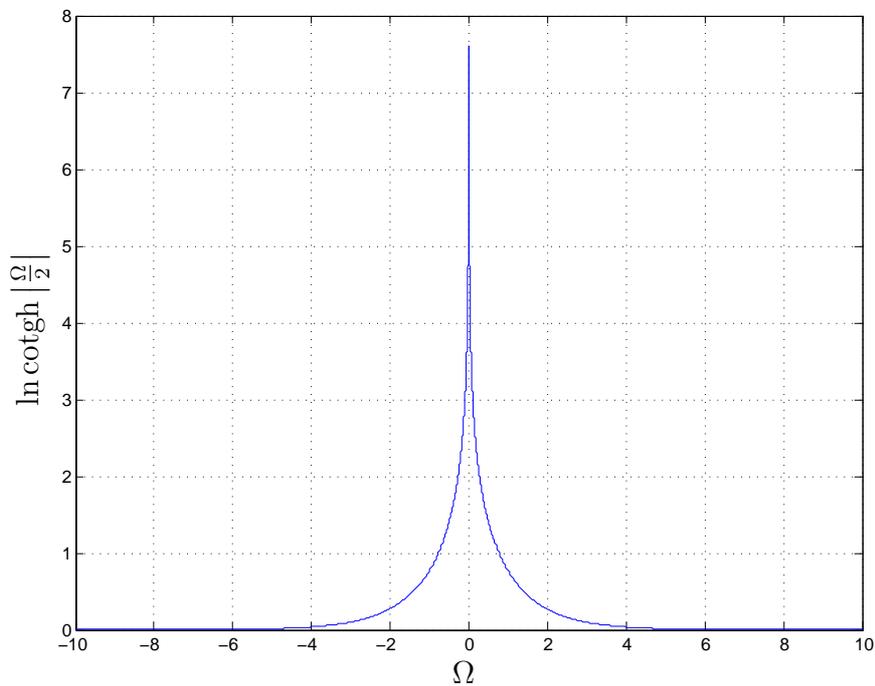


Figura 1.19: Grafico della funzione di peso (per $\Omega_0 = 0$).