
I Controllori PID (ver. 1.0)

1.1 Generalità dei controllori PID

Una classe di controllori molto utilizzata in applicazioni industriali sono i controllori PID (o controllori standard). Essi elaborano il segnale errore in ingresso attraverso tre blocchi (uno ad azione proporzionale, uno ad azione integrativa e uno ad azione derivativa), i cui guadagni sono i gradi di libertà in fase di progetto del controllore (Fig. 1.1).

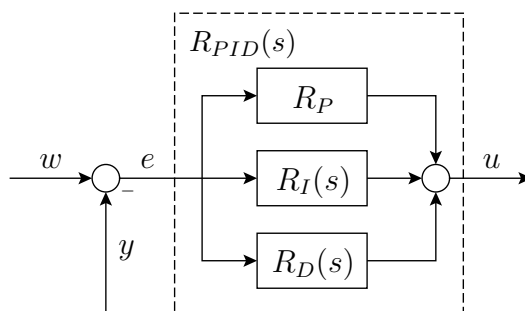


Figura 1.1: Schema di un PID ideale.

I controllori PID ideali

Il segnale di uscita di un controllore PID ideale è dato da:

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt}$$

con $K_P, K_I, K_D \geq 0$ (nell'ipotesi che il guadagno di processo sia positivo).

Nella letteratura tecnica si denomina *banda proporzionale* il parametro $PB = 100/K_p$.

La funzione di trasferimento di un PID ideale è:

$$R_{PID}(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s}. \quad (1.1)$$

Una forma alternativa alla (1.1) più utilizzata in pratica è la seguente:

$$R_{PID}(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) = K_P \left(\frac{T_I T_D s^2 + T_I s + 1}{T_I s} \right) \quad (1.2)$$

$T_I = K_P/K_I \longleftrightarrow$ costante di tempo integrale (o di reset).

$T_D = K_D/K_P \longleftrightarrow$ costante di tempo derivativa.

Realizzazione causale dei controllori PID

Poiché le funzioni di trasferimento (1.1)-(1.2) non sono proprie, risultano irrealizzabili in pratica.

Per ottenere una funzione di trasferimento propria si aggiunge un polo ad alta frequenza al blocco derivatore ottenendo:

$$R_{PID}^r(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + \frac{T_D s}{1 + \frac{T_D}{N} s} \right) = K_P + \frac{K_I}{s} + \frac{K_D s}{1 + \frac{K_D}{K_P N} s}.$$

La costante positiva N è scelta in modo tale che il polo $s = -N/T_D$ sia fuori dalla banda del controllo ($N = 5 \div 20$).

In Fig. 1.1 sono riportate le risposte in frequenza delle funzioni di trasferimento di un PID ideale e reale.

In genere, nel seguito faremo riferimento sempre alla forma ideale.

Casi particolari

Casi particolari sono i regolatori P , PI e PD .

$$R_P = K_P$$

$$R_{PI}(s) = \frac{K_P s + K_I}{s} = K_P \frac{1 + T_I s}{T_I s}$$

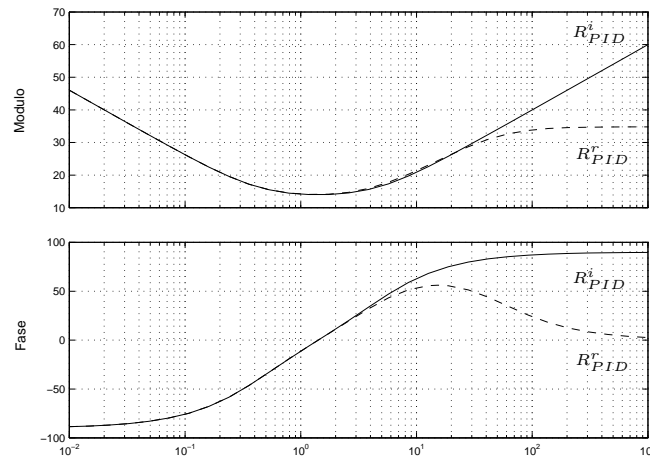


Figura 1.2: Diagramma di Bode di un controllore PID ideale (—) e reale (---).

$$R_{PD}(s) = K_P + K_D s = K_P(1 + T_D s)$$

I regolatori PID ideali hanno un polo nell'origine e 2 zeri in

$$z_{1,2} = \frac{-T_I \pm \sqrt{T_I(T_I - 4T_D)}}{2T_I T_D}$$

Al variare dei parametri, i due zeri possono essere complessi, reali distinti o reali coincidenti (se $T_i = 4T_D$). Spesso, per semplificare la taratura, si preferisce avere 2 zeri reali coincidenti.

1.2 Aspetti realizzativi dei controllori PID

Poiché il riferimento in un sistema controllato può contenere segnali a gradino o comunque segnali con rapida variazione, negli istanti in cui si ha una variazione, il blocco derivatore fornisce un contributo al segnale di attuazione molto elevato. Si usa allora sottoporre ad azione derivativa l'uscita y piuttosto che il segnale di errore e (Fig. 1.2b).

Vale che:

- I poli ad anello chiuso delle due configurazioni sono gli stessi.

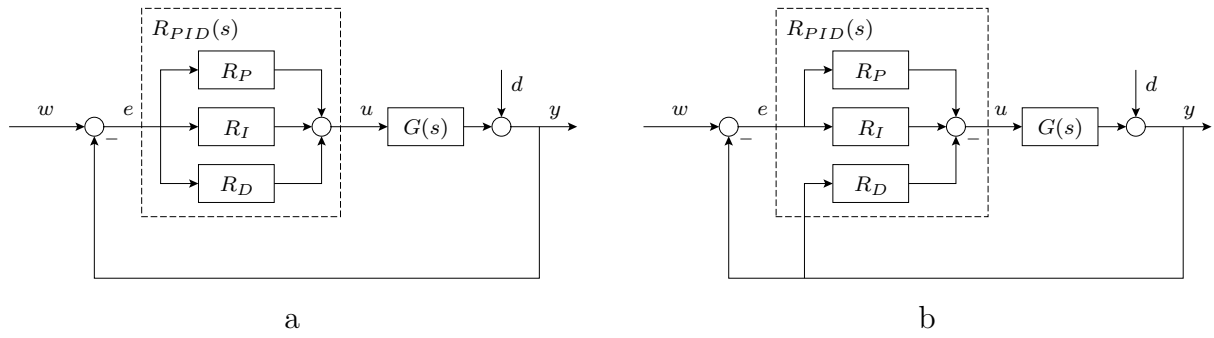


Figura 1.3: Controllore PID con azione derivativa sul segnale di errore (a), e sull'uscita (b).

- Le funzioni di trasferimento $S(s) = Y(s)/D(s)$ e $Q(s) = U(s)/D(s)$ sono identiche nelle due configurazioni.

Infatti, nel caso di Fig. 1.2a si ha:

$$Y(s) = \frac{R_{PID}(s) G(s)}{1 + R_{PID}(s) G(s)} W(s) + \frac{1}{1 + R_{PID}(s) G(s)} D(s)$$

$$U(s) = \frac{R_{PID}(s)}{1 + R_{PID}(s) G(s)} [W(s) - D(s)] ,$$

mentre per quanto riguarda il caso in Fig. 1.2b, risulta:

$$Y(s) = \frac{R_{PI}(s) G(s)}{1 + R_{PID}(s) G(s)} W(s) + \frac{1}{1 + R_{PID}(s) G(s)} D(s)$$

$$U(s) = \frac{R_{PI}(s)}{1 + R_{PID}(s) G(s)} W(s) - \frac{R_{PID}(s)}{1 + R_{PID}(s) G(s)} D(s).$$

- $F(s) = Y(s)/W(s)$ ha sempre guadagno unitario e $S(s)$ ha uno zero nell'origine; quindi il sistema riesce ancora ad inseguire un riferimento a gradino senza errori e garantire la reiezione dei disturbi costanti.

Esempio 1.1

$$G(s) = \frac{5}{(s+1)^2(s+3)}.$$

Consideriamo un R_{PID} con: $K_P = 3$, $K_I = 2$, $K_D = 1$ ($T_I = 3/2$, $T_D = 1/3$), ovvero

$$R_{PID}(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{s}$$

$$L(s) = R_{PID}(s) G(s) = \frac{5(s+2)}{s(s+1)(s+3)},$$

per cui si ha:

$$\omega_c \simeq 1.84 \text{ rad/s} \quad , \quad \phi_m \simeq 40^\circ \quad , \quad K_m \rightarrow \infty,$$

dove con ω_c denotiamo la frequenza di attraversamento degli 0dB, con ϕ_m il margine di fase e con K_m il margine di guadagno.

Se si considera un PID reale con $N = 5$ (polo aggiuntivo in $-N/T_D = -15$) si ottiene:

$$\omega_c \simeq 1.92 \text{ rad/s} \quad , \quad \phi_m \simeq 37^\circ \quad , \quad K_m \simeq 17 \text{ dB}.$$

E' interessante notare l'andamento di y ed u per le due realizzazioni (derivazione di e o di y) del controllore in corrispondenza ad un ingresso a gradino.

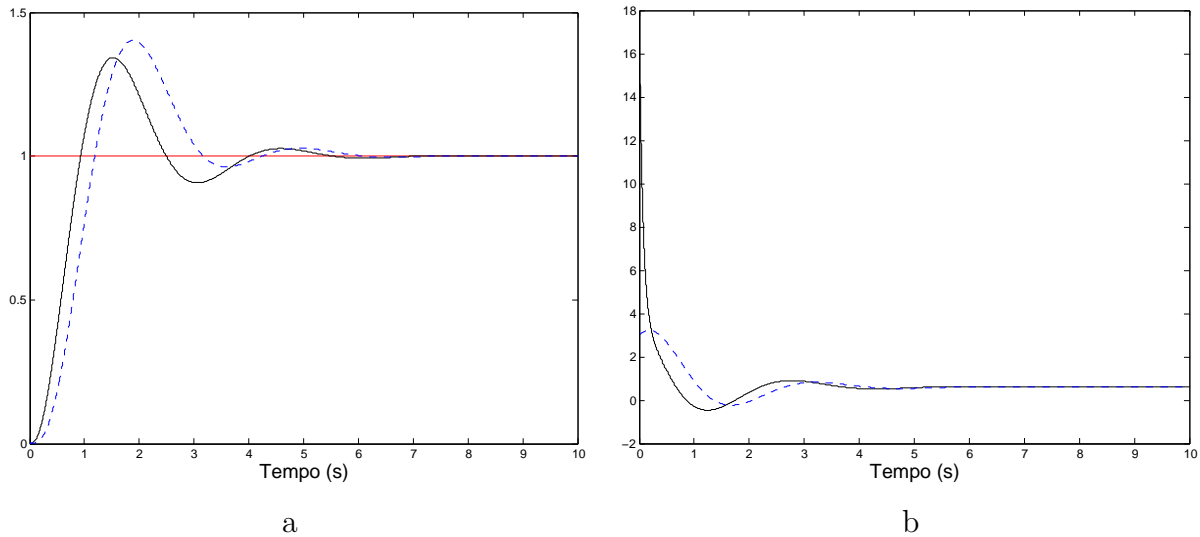


Figura 1.4: (a) Risposta al gradino del sistema dell'esempio 1.1 con azione derivativa sull'errore (—) e sull'uscita (---). (b) Relativo segnale di comando $u(t)$ per i due casi.

Scelta del valore di N

Come enunciato in precedenza, la scelta di N determina la posizione del polo aggiuntivo.

Poiché al crescere di N , $R_{PID}^r \rightarrow R_{PID}$, e $|R_{PID}(j\omega)| \rightarrow \infty$ per $\omega \rightarrow \infty$, allora per moderare l'eccitazione del comando da parte di componenti ad alta frequenza dei disturbi in anello d , bisogna selezionare N il più basso possibile, compatibilmente con il posizionare il polo aggiuntivo fuori dalla banda del controllo.

A titolo esemplificativo, vale la pena osservare gli andamenti di y e u per $N = 5$ e $N = 30$ nel caso in cui il sistema di controllo dell'esempio 1.1 venga sottoposto ad un disturbo

d a spettro costante. In Fig. 1.5 viene riportata l'uscita del sistema per le due scelte di N ; notare che le due uscite sono quasi perfettamente coincidenti. In Fig. 1.6 sono invece riportati i valori del comando; in questo caso si può notare come la scelta di un valore di $N = 5$ risulti decisamente migliore.

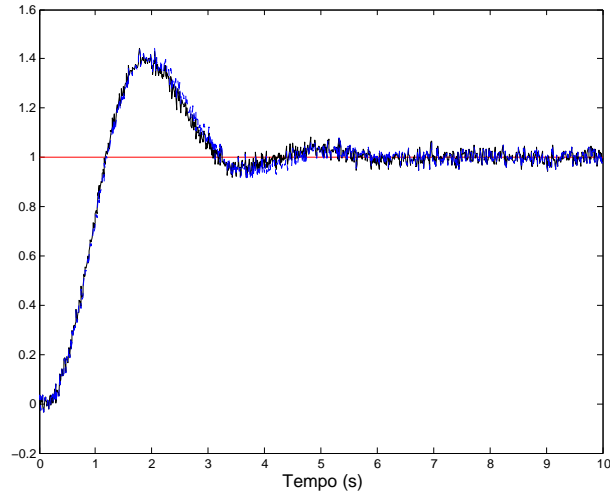


Figura 1.5: Andamento di w e y nell'esempio 1.1 con lo schema di derivazione dell'uscita per $N = 5$ (—) e $N = 30$ (---).

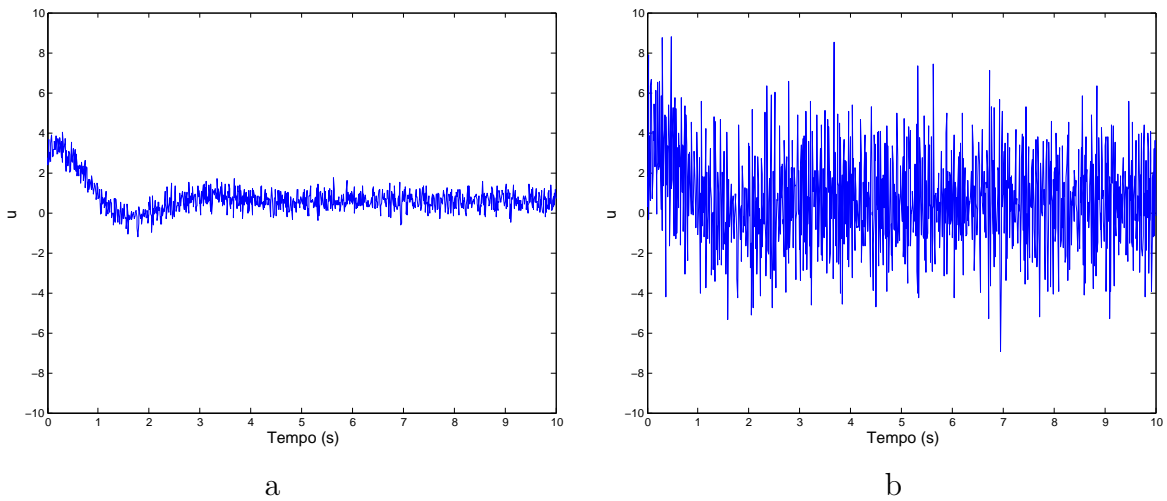


Figura 1.6: (a) Andamento del comando u per $N = 5$. (b) Andamento del comando u per $N = 30$.

1.2.1 Struttura dei PID industriali

Per evitare di sollecitare molto la variabile di comando, a volte anche l'azione proporzionale è applicata solo a y , invece che a e . In generale, in ambito industriale, i regolatori

PID sono strutturati in maniera flessibile, in modo da rendere agevole la loro taratura. In particolare:

$$U(s) = K_P E_P(s) + \frac{K_I}{s} E(s) + K_D s E_D(s) ,$$

dove:

$$\begin{cases} E(s) & = W(s) - Y(s) \\ E_P(s) & = \alpha W(s) - Y(s) \\ E_D(s) & = \beta W(s) - Y(s) \end{cases}$$

I parametri α e β sono scelti in modo da ottimizzare le prestazioni del sistema di controllo.

Poiché l'analisi fatta in precedenza per lo schema del PID con azione derivativa sull'uscita può essere estesa a qualunque α e β , se ne deduce che al variare di α e β , mentre la posizione dei poli del sistema ad anello chiuso non varia, cambiano invece gli zeri di $Y(s)/W(s)$ e $U(s)/W(s)$, e di conseguenza le prestazioni del sistema.

1.3 Desaturazione dell'azione integrale (schemi anti-windup)

Gli attuatori utilizzati nei sistemi di controllo hanno dei vincoli sull'ampiezza delle uscite, che non possono superare dei valori massimi e minimi. Quando si utilizza un regolatore con azione integrale, è possibile che l'uscita del controllore raggiunga i suddetti vincoli; in tal caso l'azione dell'attuatore non può crescere, anche se l'errore di regolazione $e(t)$ non è nullo.

Assumiamo per comodità di avere un compensatore puramente integrale del tipo K_I/s . La situazione reale che spesso si incontra è quella riportata in Fig. 1.7 (attuatore in saturazione), in cui:

$$m(t) = \begin{cases} -U_M & , \text{ se } u(t) < -U_M \\ u(t) & , \text{ se } |u(t)| \leq U_M \\ U_M & , \text{ se } u(t) > U_M \end{cases}$$

Il fenomeno del wind-up

In presenza di saturazione, come detto in precedenza, può verificarsi che l'uscita dell'attuatore non cresca, pur rimanendo l'errore di regolazione $e(t)$ non nullo. Conseguentemente, il termine integrale continua a crescere, ma tale incremento non produce alcun effetto

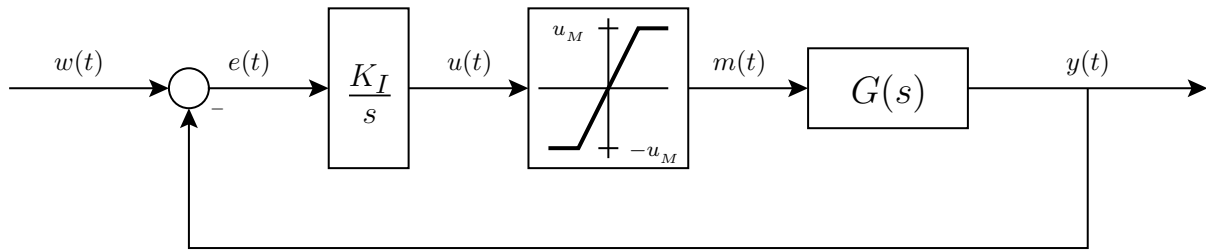


Figura 1.7: Schema in cui l'attuatore presenta una saturazione.

sulla variabile di comando dell'impianto. Tale situazione, oltre a non far funzionare correttamente il regolatore, rende inattivo il regolatore anche quando l'errore diminuisce o si inverte di segno; infatti, il sistema di regolazione può riattivarsi solo allorché il segnale $u(t)$ rientra nella zona di linearità della caratteristica dell'attuatore (*scarica del termine integrale*). Questo fenomeno si chiama comunemente *carica integrale* o *integral wind-up*.

Esempio 1.2

Sia data la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{4}{s + 2}.$$

Assumiamo di utilizzare un controllore integrale con $K_I = 1$. In condizioni di linearità risulta:

$$\omega_c \simeq 1.57 \text{ rad/s} \quad , \quad \phi_m \simeq 52^\circ.$$

Supponiamo adesso che l'attuatore presenti una saturazione con $U_M = 0.53$. I risultati della simulazione per un ingresso a gradino sono mostrati in Fig. 1.8.

Schema di desaturazione

Il problema del wind-up può essere evitato interrompendo l'azione integrale non appena l'uscita del controllore raggiunge il livello di saturazione dell'attuatore.

Una possibile soluzione è riportata in Fig. 1.9.

Supponiamo che il controllore PID che deve essere realizzato sia della forma generale

$$R_{PID}(s) = \frac{N_R(s)}{D_R(s)}, \quad \text{con } D_R(0) = 0,$$

in cui la condizione $D_R(0) = 0$ implica la presenza di un blocco integrale nel controllore. Supponiamo che sia $N_R(0) > 0$. Allora, riferendosi allo schema riportato in Fig. 1.9, si

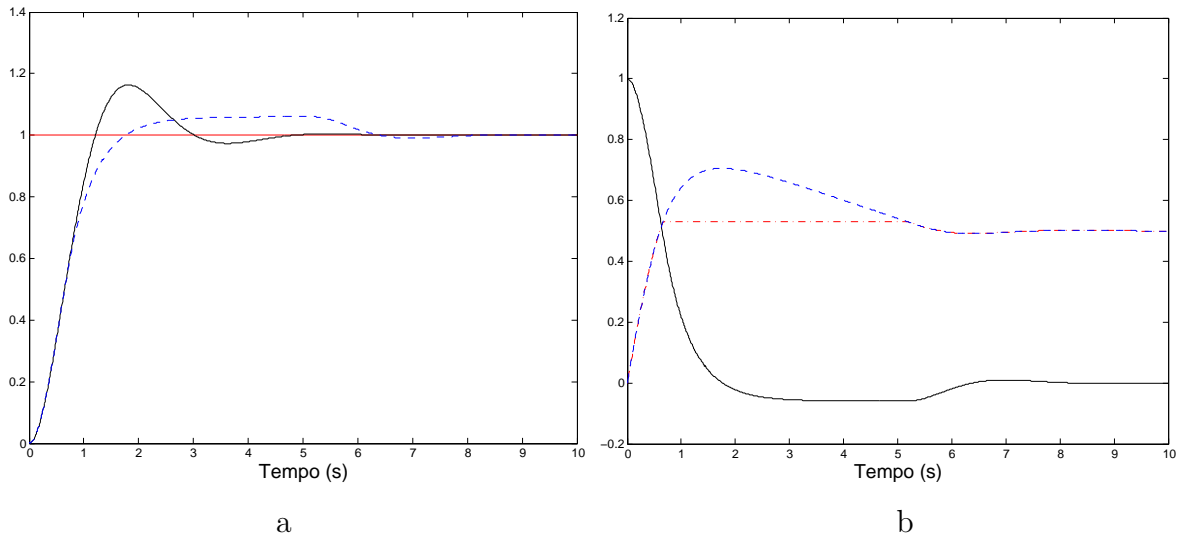


Figura 1.8: (a) Risposta di un sistema in assenza (—) e in presenza (---) di saturazione. (b) Andamento dei segnali di $e(t)$ (—), $u(t)$ (---) ed $m(t)$ (-.) in presenza di saturazione.

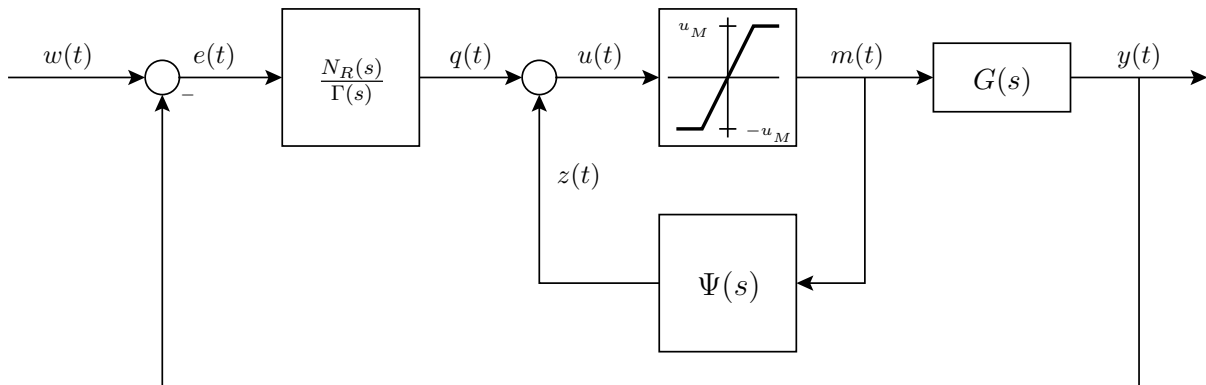


Figura 1.9: Schema di realizzazione di un controllore PID con dispositivo anti wind-up.

sceglie $\Gamma(s)$ in modo tale che la funzione di trasferimento

$$\Psi(s) = \frac{\Gamma(s) - D_R(s)}{\Gamma(s)}$$

sia asintoticamente stabile, strettamente propria e con guadagno unitario ($\Psi(0) = 1$). Si può allora osservare che:

- Se l'attuatore opera in regione di linearità, la funzione di trasferimento fra $e(t)$ e $m(t)$ coincide con la $R_{PID}(s)$ desiderata.
- Se il segnale errore $e(t)$ permane dello stesso segno per un tempo elevato, allora anche $q(t)$, in funzione della dinamica di $\Gamma(s)$, assumerà lo stesso segno; $m(t)$ satura

al valore massimo U_M dell'attuatore. Dato che $\Psi(0) = 1$, anche $z(t)$ si assesterà al valore U_M , sempre con una dinamica che dipende da $\Gamma(s)$. Se $e(t)$ cambia di segno, anche $q(t)$ cambia segno e quindi il segnale $u(t) = q(t) + z(t)$ scende subito sotto il valore di saturazione U_M , attivando il comportamento lineare dell'attuatore. Le prestazioni del sistema di desaturazione dipendono dalla scelta del polinomio $\Gamma(s)$, che costituisce il nucleo del progetto del desaturatore.

Esempio 1.3

Facendo riferimento alle funzioni dell'esempio 1.2, assumiamo:

$$\Gamma(s) = s + 8 \quad \Longrightarrow \quad \Psi(s) = \frac{8}{s + 8}.$$

La risposta del sistema desaturato è riportata in Fig. 1.10.

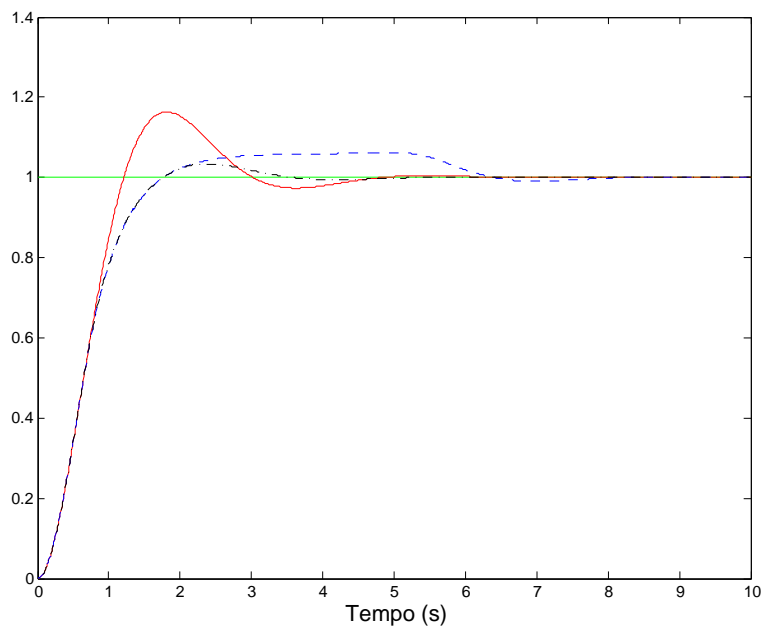


Figura 1.10: Risposta del sistema senza saturazione (-), con saturazione (-) e con saturazione e anti wind-up (-).

Specializzando il caso generale al caso PI, si ha che una scelta generale è:

$$R_{PI}(s) = \frac{K_P s + K_I}{s} = K_P \frac{1 + T_I s}{T_I s} \quad \Longrightarrow \quad \Gamma(s) = 1 + s T_I$$

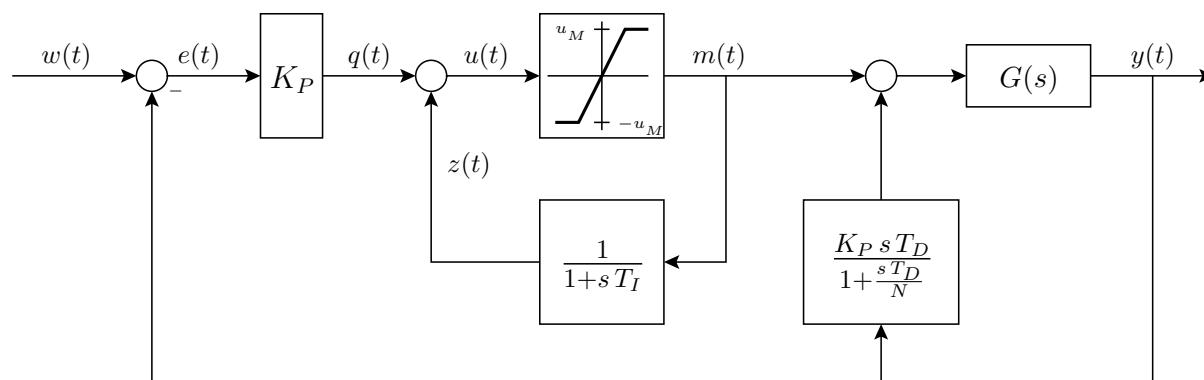


Figura 1.11: Schema generale di anti wind-up per un controllore PI.

1.3.1 Metodi di taratura automatica

In molte applicazioni industriali, la costruzione di un buon modello dell'impianto può essere piuttosto onerosa, soprattutto a fronte di esigenze di controllo non particolarmente spinte. Per questi casi sono disponibili delle tecniche di taratura dei parametri del PID (K_P , T_I e T_D) che fanno riferimento a poche e semplici prove da eseguirsi sull'impianto. Il metodo più classico utilizzato è quello di Ziegler-Nichols. Analizzeremo adesso questa tecnica, sotto le ipotesi che il sistema sia asintoticamente stabile ad anello aperto e abbia guadagno positivo.

Metodo di Ziegler-Nichols (in anello chiuso)

Si chiude il sistema in retroazione su un controllore proporzionale. Fornendo al sistema un ingresso a gradino, si aumenta il guadagno del controllore finché il sistema oscilla (condizione critica di stabilità). Si indicano con \bar{K}_P e \bar{T} il guadagno critico e il periodo dell'oscillazione dell'uscita $y(t)$.

I parametri del regolatore P , PI o PID vengono determinati utilizzando la Tabella 1.1.

$R_{PID}(s)$	K_P	T_I	T_D
P	$0.5\bar{K}_P$		
PI	$0.45\bar{K}_P$	$0.8\bar{T}$	
PID	$0.6\bar{K}_P$	$0.5\bar{T}$	$0.125\bar{T}$

Tabella 1.1: Tabella di Ziegler-Nichols.

Notare che se si pone $T_I = 4T_D$ allora gli zeri del regolatore PID sono coincidenti in posizione $s = -4/\bar{T}$.

1.4 Interpretazione frequenziale dei PID

La taratura dei PID col metodo di Ziegler-Nichols utilizza due quantità: \bar{K}_P e \bar{T} . Osserviamo che la prima quantità è esattamente il margine di guadagno (assunto finito) del sistema controllato $G(s)$, mentre $\omega_\pi = 2\pi/\bar{T}$ è la pulsazione per cui il diagramma polare $G(j\omega)$ attraversa il semiasse reale negativo. Si può quindi vedere come il controllore venga tarato conoscendo soltanto un punto della risposta in frequenza del sistema $G(j\omega_\pi) = -1/\bar{K}_P$. Per sistemi comuni, tale informazione è sufficiente per progettare controllori che garantiscano prestazioni soddisfacenti.

Esempio 1.4

Consideriamo:

$$G(s) = \frac{5}{(s+1)^2(s+3)}.$$

Si può verificare che:

$$\omega_\pi = 2.65, K_m = 6.4 \implies \bar{K}_P = 6.4, \bar{T} = 2.37$$

Dalla Tabella 1.1 risulta, per un controllore PI, $K_P = 2.88$ e $T_I = 1.9$, con i seguenti indici di prestazione

$$\phi_m \simeq 10.5^\circ, \omega_c \simeq 1.81 \text{ rad/s}, K'_m \simeq 1.42.$$

Nel caso di un controllore PID, con $N = 10$, i parametri forniti dal metodo di Ziegler-Nichols risultano $K_P = 3.84$, $T_I = 1.19$, $T_D = 0.3$ e le relative prestazioni:

$$\phi_m \simeq 27.6^\circ, \omega_c \simeq 2.14 \text{ rad/s}, K'_m \simeq 10.3.$$

E' utile notare come il controllore PID abbia aumentato sia il margine di guadagno che quello di fase (rispetto al PI).

Valutazione delle prestazioni di un PID

Analizziamo adesso le prestazioni ottenute utilizzando i criteri di taratura automatica.

- Nell'ipotesi di utilizzare un controllore puramente proporzionale, si ottiene che

$$K_P G(j\omega_\pi) = 0.5 \bar{K}_P G(j\omega_\pi) = -0.5,$$

ovvero il controllore proporzionale tarato automaticamente garantisce un margine di guadagno K_m pari a 2.

- Nel caso generale, fissata una frequenza ω^* , il diagramma polare di $R_{PID}(s)G(s)$ può essere modificato variando i parametri del PID, secondo l'effetto indicato in Fig. 1.12.

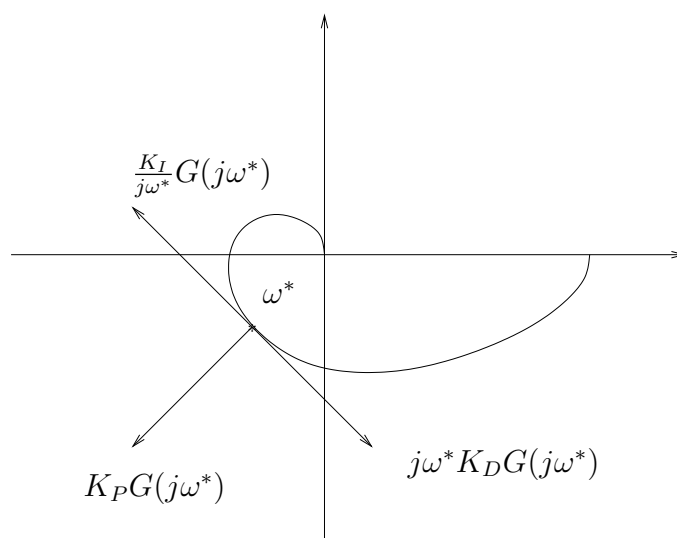


Figura 1.12: Effetto dei termini proporzionale, integrale e derivativo di un controllore PID.

In generale si può vedere come il termine derivativo tenda a far aumentare il margine di fase, mentre l'effetto integrativo tende a ridurlo.